UNO SGUARDO
ALLE ORIGINI ED ALLO SVILUPPO
DELLA MATEMATICA PURA

DISCORSO

letto il 4 Novembre 1889

IN OCCASIONE DELLA SOLENNE APERTURA DEGLI STUDI

NELLA R. UNIVERSITÀ DI TORINO

DAL

Prof. ENRICO D'OVIDIO.

Digitized by Google

Digitized by Google

UNO SGUARDO
ALLE ORIGINI ED ALLO SVILUPPO
DELLA MATEMATICA PURA

I.

Défiez vous des ensorcellements et des attraits diaboliques de la Géométrie.
(FÉNELON).

Socrate aveva il suo demonio: un demonio dissuadente. Ho il mio demonio anche io; ma, ahimè! è un demonio persuadente. Non ha il piè di becco o di cavallo, come il Galeotto del dottor Faust; non veste alla scozzese o all'andalusa, come i diavoli da scena; gli è un picciolo e vispo demonietto, quintessenza di goliardo, pieno di gaia malizia, grande artefice di sorprese e di scherzi scolastici. Fu lui che ispirò ai miei egregi colleghi l'idea di designare me a inaugurare questo nuovo anno di studî; fu lui che tolse a me la forza di sottrarmi al grave còmpito, per tema di esser citato come

Digitized by Google

colui « che fece per viltate il gran rifiuto. » Udite, e giudicate se io non mi apponga al vero.

Prima del 1853 due erano le orazioni inaugurali di ciascun anno scolastico nella nostra Università; l'una era pronunziata dal professore di letteratura italiana, l'altra il giorno seguente dal professore di letteratura latina. Il primo, avendo sotto mano gran copia di argomenti vasti ed attraenti, i quali interessano ogni genere di persone colte, poichè nella letteratura nostrana tutti si rivelano i palpiti della vita nazionale, non durava certo fatica a riescir gradito. Il secondo, evocando le memorie di un'antica civiltà italiana, che seppe espandersi in tutto il mondo e signoreggiarlo, e della cui eredità vive in gran parte anche la nostra, era sicuro di elevare l'animo degli uditori a un cielo d'idee e di sentimenti che li inebriavano e tenevano sospesi al suo labbro. Perorava egli nella lingua di *Cicerone*, il che cresceva solennità e forza al suo dire. Non tutti forse arrivavano, ma tutti si sforzavano di intendere la magniloquente frase dell'erudito maestro; e a ogni modo cercavano di parere a sè stessi buoni intenditori, mantenendo una attenzione risoluta durante quell'ora di forzata immobilità.

Ma col volger degli anni si mutò stile. I rapidi progressi fatti dalle scienze sperimentali, il nuovo

Digitized by Google

atteggiarsi delle scienze giuridiche sotto l'influsso delle idee democratiche e del governo parlamentare, destarono la curiosità di vedere anche i cultori di tali scienze cimentarsi nell'arringo oratorio ad enarrare la gloria delle recenti scoperte e delle conquistate libertà civili. Così una vita nuova fu infusa nella vecchia solennità inaugurale, ed una ricca serie di svariate dissertazioni scientifiche si venne di anno in anno raccogliendo, le quali formano come tante strofe di un festoso e sonoro inno alla Scienza.

Sarebbe pregio dell'opera rammentare i nomi degli oratori che mi precedettero. Ma fra tanti nomi cari alla fama, neppur uno ne riscontrereste, che fosse di un cultore degli studî matematici. Nè questo fatto è un figlio del cieco caso, ma è piuttosto da ascrivere a una peculiare condizione della Matematica e de' suoi cultori. Imperocchè non può negarsi che i concetti matematici posseggono una così stringata determinatezza, e il linguaggio che li esprime è così severo e remoto dal comune discorrere, e l'obbietto di quei concetti e di quel linguaggio è così astratto, che mal si prestano a una orazione da tenersi in una cerimonia come quella che qui ci raduna, innanzi a un pubblico di cui la massima parte è intesa a studî estranei alla Matematica. O l'oratore spazia nelle generalità,

Digitized by Google

e finisce per ripeter cose trite; o si addentra in qualche particolare argomento, e rischia di riescir oscuro ai più; o sceglie un soggetto che non cada nel dominio dei propri studî speciali, e rischia di usurpare l'ufficio altrui, e di sentir susurrare intorno: « ne sutor ultra crepidam »; « tractant fabrilia fabri. »

Scorsero i nostri matematici il triplo pericolo, e seppero cansarlo. Ma nol seppi io; ed oggi mi tocca di affrontarlo, senza speranza di escirne con onore. Avevo dunque ragione di dire che un demonietto beffardo mi ha voluto giocare un tiro dei suoi! Non è il primo; sia l'ultimo almeno!

Comunque, eccomi su questa paurosa cattedra. Ci sono, e ci resterò..... quel tanto, che il dovere da un lato e la discrezione dall'altro consigliano. Conto, umanissimi uditori, sulla vostra benevolenza. E per meritarla, io m'industrierò di parlare in guisa che possa comprendere chiunque abbia appresi i primi elementi della Matematica. Coloro che, già esciti fuor del lago della scuola alla riva, e abbandonati poscia ai flutti del pelago degli affari, dimenticarono; ebbene il mio demonietto ordina loro che ringiovaniscano per poco: basterà all'uopo che si lascino ipnotizzare, fissando gli occhi della mente su quel punto brillante della vita che è l'età dei venti anni.

Digitized by Google

II.

Dio eternamente geometrizza.
(PLATONE).

Egli è veramente a deplorare che fievole sia l'oratore e poco propizia l'occasione, chè la Matematica è ben degna di esser celebrata, e per la sua intima perfezione teorica e per la sua multiforme utilità pratica.

Della perfezione teorica è testimonio irrecusabile il fatto, che dalla più lontana antichità sino a noi, delle successive conquiste fatte dalla Matematica nessuna ha distrutto le precedenti. Il qual fatto trova la sua ragione nella cura costante che i matematici posero a non discostarsi mai da quei pochissimi procedimenti logici, che sono stati seguiti spontaneamente, naturalmente, senza discussione e senza eccezione, da tutti gli uomini, in tutti i tempi, in tutti i luoghi. Quanti sistemi filosofici non si sono succeduti, ciascuno in antagonismo al precedente, da *Tàlete* e *Platone* a *Cartesio*, da *Kant* a *Hegel* a *Spencer?*

Digitized by Google

E nelle scienze sperimentali quante ipotesi inconciliabili fra loro non hanno successivamente imperato nella spiegazione dei fenomeni naturali, da *Aristotile* a *Darwin?* Solo nel successivo svilupparsi delle discipline matematiche nulla vi è stato da rinnegare, nulla da mutare sostanzialmente; e il trionfo di concetti nuovi non ha infirmato mai le verità già acquisite, ma ne ha soltanto mutato il posto e la ragion logica, accresciuto o scemato il pregio e l'uso. Gli stessi pochi errori, che il progredire della scienza è andata man mano distruggendo, non erano da imputare a falsità di metodi, ma piuttosto a illecito uso di essi.

Ad esempio: se il camaldolese *Guido Grandi* asseriva la serie $1-1+1-1+\ldots$ aver per somma $\frac{1}{2}$, e aveva la bislacca pretesa di spiegare con essa la creazione del mondo dal nulla, non era già colpa dei principî che governavan la teoria delle serie, ma piuttosto uno strano sragionamento consistente in una illegittima applicazione di legittime idee. *Abel* infatti, a proposito delle serie divergenti, diceva giustamente che col loro mezzo si potrebbe dimostrare tutto quel che si volesse, l'impossibile al pari del possibile. Troppa grazia!

Si è per la sua intima perfezione teorica, che la Matematica è universalmente riconosciuta come la

Digitized by Google

migliore scuola di logica, come la miglior ginnastica intellettuale; sicchè, anche dopo averne abbandonato lo studio, il salutare effetto ne rimane; ed è, come ben dice il *Lacroix*: « il gusto dell'e- « sattezza, la ripugnanza a contentarsi di nozioni « vaghe, ovvero ad abbandonarsi a delle ipotesi « gratuite per quanto seducenti, il bisogno di veder « chiaro il nesso fra le varie proposizioni e lo scopo « cui tendono », l'onestà, sto per dire, intellettuale. Così il cibo sano e succulento lascia il sangue arricchito e la fibra irrobustita.

E si è per questa sua perfezione che la Matematica ha sempre esercitato un fascino sugl'ingegni più eletti; fascino, che in molti di essi suscitò una inestinguibile fiamma di amore: esempio il nostro venerato e compianto *Genocchi*, che ad essa si volse per irresistibile vocazione mentre già professava scienze giuridiche, e ad essa rimase fedelmente stretto finchè gli servì la mente poderosa ed erudita. Alla sua sacra e cara memoria un saluto!

Digitized by Google

III.

I numeri governano il mondo.
(Platone).

Omnia in pondere et mensura disposuisti.
(Ecclesiaste).

Vi è geometria dapertutto.
(Leibniz).

E non meno mirabile della perfezione teorica della Matematica è la sua utilità nelle pratiche applicazioni. Non io, matematico puro, potrei sentirmi « the right man in the right place » ove mi proponessi di discorrere con qualche autorità delle applicazioni della Matematica. Cotesto còmpito spetterà forse un altro anno a più competente oratore; e poi esso mi trascinerebbe troppo al di là dei confini assegnati al mio dire. Ma basterà che io noti questo: che l'ultima parola di ogni teoria della fisica è una formola o un enunciato matematico; la meccanica, la termologia, l'elettrologia, l'acustica, l'ottica vanno a gara a provarlo. Alla Matematica ricorrono l'architettura, la geodesia, la geografia, la nautica, la cristallografia, la statistica. E la fisiologia e la chimica non anelano anch'esse a raccogliersi sotto le ali della Matematica? E quale esempio più parlante

Digitized by Google

di quello offertoci dall'Astronomia con la scoperta di Nettuno?

Ricordate? Le perturbazioni del moto ellittico del pianeta Urano richiamavano l'attenzione degli astronomi, curiosi d'indagarne la cagione misteriosa, sia mediante la sola teoria, sia con l'aiuto degli strumenti. *Leverrier* e *Adams*, senza sapere l'uno dell'altro, si arrischiarono all'audace ricerca; e la fortuna arrise loro, chè con la scorta della teoria newtoniana della gravitazione universale, giunsero a determinare quale orbita avrebbe dovuto descrivere e qual massa possedere il previsto pianeta per produrre le accennate perturbazioni. *Adams* compì primo il lavoro, ma non trovò forse ascolto in Inghilterra; più fortunato fu *Leverrier* a Parigi. Ed ecco che un astronomo di Berlino, il *Galle,* la notte del 23 Settembre 1845, punta il telescopio, e, da buon cacciatore di pianeti, coglie il recondito astro presso il luogo indicatogli dal *Leverrier*, a circa 2500 milioni di miglia dal sole, sotto la modesta parvenza di una stella di 8ª grandezza. Fu chiamata Nettuno.

Un altro esempio degno di menzione si è la scoperta della rifrazione conica, il quale vale a mostrare come le teorie matematiche possano aiutarci a discernere, non solo le cose troppo lontane, come

Digitized by Google

Nettuno, ma anche quelle, talora più nascoste e complicate, che si trovano vicino a noi a nostra insaputa.

Fresnel, guidato dalla teoria ondulatoria della luce, aveva scoperto la superficie delle onde pei cristalli a due assi ottici; ma pare non avesse avuto idea che della doppia rifrazione. Ora *Hamilton* fu condotto da una bella proprietà geometrica della superficie a concludere che dovevano esistere quattro direzioni singolari, per le quali il raggio luminoso si dividesse, non in due, ma in infinite parti formanti una superficie conica. Il *Lloyd* infatti verificò la esistenza di tali direzioni per un cristallo di aragonite.

Con lento ma continuo movimento di espansione, non conquistando ma colonizzando, la Matematica va a poco a poco invadendo tutto il campo dello studio dei fenomeni naturali e sociali. Oggi più che mai può dirsi con *Napoleone*: « l'avancement et le « perfectionnement des Mathématiques sont liés à la « prospérité de l'Etat! »

Tuttavia non vorrei altri credesse che io consideri la pratica utilità come una condizione necessaria perchè una scienza possa proclamarsi degna di essere studiata e divulgata.

Cayley all'Associazione britannica così parlava:

Digitized by Google

« Io non devo fare una difesa della Matematica; se « lo dovessi, vorrei fosse come *Socrate,* astretto nella « Repubblica di *Platone* a difender la giustizia senza « invocare i vantaggi pratici della virtù e dell'e- « quità, ma mostrando che assolutamente e per sè « stessa la virtù è un bene. »

E *Jacobi* a *Legendre* scriveva: « L'unico scopo « della scienza è l'onore dello spirito umano; a « questo titolo una questione sui numeri vale quanto « una sul sistema del mondo. »

E *Sylvester*, parlando di *Hermite* e *Lindemann*, ai quali si deve l'aver assodato che π, il rapporto della circonferenza al diametro, non è un numero algebrico, li chiama « i vincitori di PI, » titolo più superbo ai suoi occhi, che se eglino fossero stati i vincitori di Solferino o di Sadowa.

E lo storico *Green* avverte di aver messo le investigazioni scientifiche della Società reale di Londra a fianco delle vittorie di *Cromwell*.

Non altrimenti io la penso; anzi aggiungerò un'osservazione, non nuova, ma assai confortante: ed è: che ciò che oggi sembra per avventura puro e sterile lusso di teorie, domani può diventar sorgente di impreviste applicazioni importantissime.

Ad esempio: i geometri greci, che credevano la terra piana e immobile, allorchè studiavano con

Digitized by Google

tanto amore le curve dette sezioni coniche, l'ellisse, l'iperbole e la parabola, non potevano menomamente prevedere che molti secoli dopo *Keplero* avrebbe ravvisato la forma ellittica nelle curve che i pianeti descrivono intorno al sole. Nè potevano prevedere che *Borelli*, ravvisando anche nelle orbite delle comete l'ellisse, avrebbe « dissipato le paure che « una volta le comete incutevano, mostrandole quali « interessanti e belle visitatrici, che vengono per « piacere e per istruire, e non per minacciare e « distruggere. » E nemmeno contavano sulla gratitudine del futuro nocchiero, che, mediante una osservazione esatta della longitudine, avrebbe avuta preservata la vita dal naufragio.

E non è meno confortante la giusta riflessione del *Fourier:* « lo studio approfondito della natura è la sorgente più feconda delle verità matematiche. » Ad esempio: le questioni sull'attrazione universale di *Newton* suscitarono molti importanti problemi matematici, come quello famoso « dei tre corpi »; e la questione delle corde vibranti condusse *Lagrange* a rappresentare le funzioni mediante serie trigonometriche.

Digitized by Google

IV.

La Matematica forma, per dir così, un ponte fra la Fisica e la Metafisica.

(KANT).

Les vérités mathématiques sont en quelque sorte l'asymptote des vérités physiques.

(D'ALEMBERT).

Le teorie matematiche, chi ben consideri, vengono sempre suggerite nei loro inizî dai bisogni quotidiani della vita fisica e sociale. Ma una volta pervenute a costituirsi dopo lento e secolare lavorìo, esse acquistano autonomia e continuano poi a svilupparsi per virtù propria; percorrendo la sterminata distanza, che va dal conto della buona massaia alle *Disquisitiones aritmeticae* del *Gauss*, dal rozzo lavoro dello scalpellino alle speculazioni geometriche dello *Steiner*, dalle minuscole nozioni del selvaggio che non ha vocaboli per esprimer numeri superiori a 4 alla dottrina degl' iperspazî; poichè non meno dei bisogni della vita fisica dell'uomo sono varî e impellenti quelli della vita dello spirito.

È opinione comunemente accettata che noi giungiamo alle verità matematiche per via dell' esperienza; ma che questa non basta, e che vi contribuisce lo spirito.

Digitized by Google

« Nihil in intellectu quod non prius in sensu » dicevano gli scolastici; « nisi intellectus ipse » aggiungeva *Leibniz*.

E *Kant* afferma che tutte le nostre conoscenze cominciano con l'esperienza, ma noi abbiamo delle idee *a priori*, tra le quali gli assiomi matematici.

Ma *Hamilton* giudica che l'Algebra e la Geometria sono scienze di puro ragionamento; esse non traggono dall'esperienza soccorso nè autorità, ma sono o possono essere affatto isolate dai fenomeni contingenti del mondo esteriore. Lo stesso giudica d'*Alembert* della Meccanica.

Per contro *Stuart Mill* sostiene che le verità matematiche, specie le geometriche, riposano sulla esperienza, e non son altro che i risultati di questa generalizzati. Lo stesso sostiene *Riemann*,

E *Clifford* dice: « a quel modo che per co-
« struire una teoria fisica partiamo dall'esperienza
« e fondiamo sugli esperimenti un certo numero
« di assiomi che forman la base della teoria, gli
« assiomi base della geometria, benchè meno pale-
« semente, pure sono in realtà un risultato della
« esperienza. »

Ma qui osserva il *Cayley:* « le verità geometriche
« sono verità, appunto perchè riguardano quelli che
« *Mill* chiama oggetti puramente fittizî; questi non

Digitized by Google

« esistono in natura, ma si possono concepire; anzi « sono essi i soli reali, e gli oggetti materiali che « li richiamano non sono rispetto ad essi che i « fantasmi della caverna di *Platone*. Grazie ad essi « soltanto noi possiamo affermare che i loro simili « non esistono in natura. Se non avessimo la no- « zione di linea retta, noi non potremmo affermare « che non esiste alcuna linea perfettamente retta. »

Da questi accenni voi potete intravedere, o Signori, come la questione della natura e della origine delle idee fondamentali matematiche sia antica e del continuo dibattuta ed ardua a risolvere. Voi non pretendete certamente che io venga qui ora a risolverla su due piedi. È già lontano il tempo, quando io giovanetto ripetevo in buona fede le definizioni di spazio, di tempo, di numero, di forza, di senso, di anima, ecc., che con imperturbata sicurezza mi venivan somministrando maestri e trattati. Tempo felice! Ma passato dal banco dello scolaro a quello che gli sta di fronte, divenni cauto; ed oggi innanzi a una definizione « io mi sento tremar le vene e i polsi »

Che le nozioni fondamentali matematiche ci vengano suggerite dai sensi, sia allo stato naturale sia armati di appositi congegni, non mi pare si possa revocare in dubbio; e scorgo in cotesta loro prove-

Digitized by Google

nienza una guarentigia di verità e di utilità. Che i sensi non bastino, ma abbia a intervenire una elaborazione dei dati dell'esperienza per opera del pensiero, mi pare anche certo; poichè veramente io non saprei immaginare una linea materiale senza larghezza nè spessore, qual' è la linea geometrica; e così via. Si è appunto questa elaborazione del pensiero che produce la intuizione matematica.

Resta a determinare cosa sia il pensiero. Ma questo io candidamente confesso di non saper fare; e però mi arresto.

Tanto più che qui mi sovviene delle parole del *Darwin:* « Siccome l'uomo è fornito degli stessi « sensi che gli animali inferiori, così le intuizioni « fondamentali in questi debbono esser le stesse « che nell'uomo. Il quale ha pure comuni con essi « alcuni istinti, come quello della propria conser- « vazione, l'amore sessuale, l'amore della madre pel « suo nato, e così via. »

« . . . In qual modo siensi svolte dapprima le fa- « coltà della mente negli organismi inferiori, è una « ricerca senza speranza, al pari di quella del come « siasi svolta la vita; questi sono problemi serbati « per un lontano avvenire, se pure l'uomo riescirà « mai a risolverli. »

Digitized by Google

Ognun vede adunque che la questione delle prime idee matematiche è più larga e complessa di quanto si penserebbe a primo aspetto.

V.

« *De omnibus dubitandum* » proclamava *Cartesio*. L'uomo infatti è un essere in sommo grado dubitativo, incessantemente travagliato dalla nobile passione di sapere qual' è la verità, e di scrutare l'essenza delle cose. Ma, per fortuna, l'uomo è altresì un essere eminentemente operoso, e pur dubitando, costruisce intanto le scienze e conquista la natura, pieno il petto di quel sentimento arcano di fiducia, che *d'Alembert* formulava nel monito: «Allez en avant et la fois vous viendra, » e *Orazio* nell'epifonema: « Nil mortalibus arduum est. » Così l'artista di genio produce i suoi capolavori, senza che sappia definire cosa sia l'arte nè determinarne gli scopi.

Io lascerò dunque da parte la inesausta questione filosofica della natura delle cognizioni matematiche; e, per riescir più concreto e non istancar troppo la vostra attenzione, mi volgerò piuttosto a schizzare in pochi tratti il nascere e il successivo svilupparsi

Digitized by Google

dell'Analisi e della Geometria, le due parti essenziali di quella che dicesi Matematica pura. Da tali cenni storici, combinati con alcune considerazioni che farò dipoi intorno a due delle più recenti teorie, Voi potrete, meglio che da una lunga dissertazione generale, argomentare con quali criterî e con quali procedimenti i moderni matematici costruiscano o ricostruiscano e riordinino le teorie matematiche.

A chi si fa ad osservare lo stato presente della Matematica, viene in mente l'immagine di una vastissima estensione di territorio, dolcemente inclinata e leggermente ondulata, attraverso la quale scorrono parallelamente due larghe e maestose riviere, da cui diramano in diverse direzioni frequenti canali, che fra loro variamente s'intrecciano, e che recano dappertutto alimento ad una multiforme e lussureggiante flora. Quei due fiumi sono l'Analisi e la Geometria, quei canali le loro applicazioni. A misura che l'occhio risale lungo quelle correnti, a misura cioè che la mente si spinge nel passato, esse sembrano confondersi; e lassù, nelle più remote lontananze, una tinta azzurrina tutto agguaglia e confonde al primo aspetto. Guardiamovi un po' dentro.

Digitized by Google

VI.

Il faut, comme vous savez, que « multi pertranseat ut augeatur scientia. »

FERMAT a PASCAL.

Chi sa dire dove sia nata l'Aritmetica? Presso gli Egizi, o i Caldei, o i Fenici? È invece facile immaginare come sia nata. Anche le più ovvie e volgari transazioni sociali fra gli uomini hanno bisogno dei numeri; e dal ripetuto uso di essi deve essersi necessariamente a poco a poco venuto costituendo un certo nucleo di regole. È quindi verosimile che l'Aritmetica sia nata un po' dappertutto.

Ma si è presso i Greci che rinveniamo le prime tracce di una dottrina dei numeri. *Pitagora*, che ai numeri pare attribuisse virtù misteriose, è il primo che ci si presenta fra i fondatori di essa. *Eratostene* diede la regola detta del crivello, per formare una tavola limitata di numeri primi. *Euclide* dedicò una parte dei suoi immortali *Elementi* ai numeri. E *Diofanto* inventò quella che ora diciamo Analisi indeterminata.

Dopo costoro, attraversiamo più secoli muti di luce scientifica. Ma un secolo dopo aver disperso

Digitized by Google

il Museo e incendiato la biblioteca di Alessandria, gli Arabi incominciarono a prender amore agli studî matematici, e si diedero alacremente a ritrovare e restaurare le opere dei Greci. Furon gli Arabi che introdussero le cifre oggi in uso; e da essi *Gerberto*, poi papa *Silvestro II*, imparò l'Aritmetica e la diffuse in Europa (verso il 960). E gli Arabi posson esser ritenuti come i fondatori dell'Algebra.

« L'Algebra, così il *Cayley*, parrebbe esser escita « dai facili giuochi di pazienza relativi ai numeri, « che già il *Bija-Ganita* proponeva, nelle sue forme « immaginose, sulle fanciulle dai bei capegli o sugli « sciami di api volteggianti fra le piante odorose e « l'ape regina ronzante attorno al fiore del loto; que- « stioni, che oggidì il principiante ritrova nei suoi « quaderni scolastici sotto la forma più prosaica di « un enunciato conducente a una semplice equa- « zione. »

Spuntava il sole della civiltà rinascente quando, al principio del secolo XIII, *Leonardo Fibonacci* da Pisa dava all'Europa il primo trattato di Algebra. Ma quasi due secoli e mezzo trascorsero prima che Frà *Luca Pacciolo* da Borgo S. Sepolcro ripigliasse e continuasse l'opera di Fibonacci. Però un passo decisivo fece l'Algebra nel secolo XVI per opera di *Scipione Dal Ferro* bolognese, di *Nicolò Fontana*

Digitized by Google

(detto il *Tartaglia*) da Brescia, di *Girolamo Cardano* pavese, ai quali in complesso è dovuta la risoluzione dell'equazione di 3° grado. Sarebbe esilarante narrare le dispute fra *Tartaglia*, *Cardano* ed altri circa la priorità della scoperta, e i cartelli di sfida fra *Tartaglia* e *Ludovico Ferrari* o *Anton Maria del Fiore;* ma, anzichè insistere su cotesto storico pettegolezzo, mi giova notare che la introduzione dell'Algebra in Europa, e la risoluzione dell'equazione di 3° grado, nonchè quella dell'equazione di 4° grado dovuta al *Ferrari*, due scoperte capitali nella storia della scienza, sono gloria italiana.

La dottrina delle equazioni continuò a svolgersi grazie a *Viète, Harriot, Cartesio, Hudde, Girard, Newton*, ed altri. Intanto *Nepero* inventava i logaritmi, dei quali è risaputa la grande utilità nei calcoli, e con essi raddoppiava la vita agli astronomi. (L'unico elisir di lunga vita possibile sta, non nel prolungarla, ma nel renderla più intensa). E *Fermat* enunciava quei celebri teoremi, che han poi formato la disperazione di tanti provetti analisti e lo specchio delle allodole pei dilettanti.

Ed eccoci giunti all'epoca memorabile della scoperta del calcolo infinitesimale. *Leibniz* fu il primo a pubblicare i rudimenti così del calcolo differenziale come dell'integrale. *Newton* qualche anno dopo

Digitized by Google

nei suoi « *Principia* » faceva uso del metodo delle flussioni, che a quello era analogo. Una fiera controversia si accese anche allora intorno alla priorità della scoperta; fu un vero torneo scientifico fra i matematici del continente e dell'Inghilterra; e il mondo matematico si divise in due partiti, separati non meno dall'odio che dal mare. (Fortunatamente si è finito per riconoscere che quei due sommi eran pervenuti, l'uno indipendentemente dall'altro, a creare il nuovo metodo, sotto nomi e segni differenti). I fratelli *Giacomo* e *Giovanni Bernoulli*, pur dilaniandosi fra loro, promovevano intanto il calcolo leibniziano, applicandolo a una folla d'importanti problemi geometrici e meccanici, e i loro figliuoli e nipoti li seguitavano; mentre d'altra parte *Taylor*, *Cotes* con altri svolgevano le idee newtoniane. E mentre gl'italiani *Manfredi*, *Fagnano*, *Riccati*, trattavano varî casi d'integrazione di equazioni differenziali, *L'Hôpital* e *Maclaurin* esponevano in appositi trattati la nuova scienza. La quale, intanto, arricchendosi ogni giorno di vigore e di armi, si divulgava, s'imponeva agl'increduli riottosi, e trionfava. E ben a ragione, poichè essa è davvero il « novum organum » del pensiero matematico, e può ben chiamarsi il microscopio del mondo delle quantità: un microscopio di potenza infinita.

Digitized by Google

Fu *Eulero*, che, spogliando i problemi trattati col nuovo metodo della veste geometrica fino allora serbata, e facendo valere adeguatamente il concetto di funzione, fondò quella che chiamasi oggi « l'Analisi. » A questo grande analista, ricco di abili trovate, scrittore fecondissimo, perspicuo, attraente, seguì *Lagrange*, il torinese (non dispiaccia ai nostri buoni vicini), sommo ingegno, creatore di metodi generali (tra' quali quello delle variazioni), scrittore compostamente elegante. E qui si presentano spontanei i nomi illustri di *D'Alembert*, *Laplace*, *Legendre*, *Ampère*, *Fourier*, *Poisson*, *Cauchy*, *Gauss*, *Abel*, *Jacobi*, *Göpel*, *Rosenhain*, *Puiseux*, *Briot*, *Bouquet*, *Sturm*, *Bessel*, *Liouville*, *Grassmann*, *Dirichlet*, *Riemann*, *Clebsch*, *Hankel*, *Halphen*,..., per tacer dei viventi *Weierstrass*, *Kronecker*, *Hermite*, *Cayley*, *Brioschi*, *Betti*, *Fuchs*, *Schwarz*, *Beltrami*, *Darboux*, *Jordan*, *Casorati*, *Dini*, *Mittag-Leffler*, *Klein*, *Poincaré*, *Picard*, *Cantor*,... E non parlo dei progressi che la teoria dei numeri, quella delle equazioni algebriche e quella degl'invarianti devono a parecchi dei dotti dianzi citati e rispettivamente a *Eisenstein*, *Tschebischeff*, *Kummer*, *Genocchi*, *Dedekind*,..., a *Ruffini*, *Malfatti*, *Galois*, *Jerrard*,...., a *Hesse*, *Arnhold*, *Sylvester*, *Gordan*, *Salmon*, *Battaglini*...; i quali han recato all'Analisi così abbondante messe

Digitized by Google

di concetti larghi e rigorosi, di metodi fecondi e sicuri, di teoremi generali e utili, che ad enumerarli non basterebbe un capace volume.

VII.

I più remoti tentativi in Geometria furon fatti dagli Egizî, costrettivi, giusta il racconto di *Erodoto*, dalle inondazioni periodiche del Nilo, le quali cancellavano le delimitazioni fra i pezzi di terreno posseduti dagli indigeni, onde rendevasi necessario aver modo di ripristinarle volta per volta.

Ma fu merito dei Greci aver costituito una vera scienza geometrica. *Talete*, *Pitagora*, *Platone*, *Euclide*, *Archimede*, *Apollonio*, e altri non pochi, durante circa cinque secoli, misero assieme un vistoso corredo di belle proprietà delle figure composte di punti, rette e piani, circoli e sfere, coni e cilindri. Un mirabile spirito di precisione pervade la geometria greca, degna sorella delle altre belle figlie del pensiero ellenico.

Ma sopravviene l'êra volgare, e langue la face geometrica: *Ipparco*, *Tolomeo*, *Pappo* sono gli ultimi guizzi della sua luce. I Romani nulla si curano di Geometria; e nelle tenebre del medio evo va smarrita quasi ogni memoria di ricerche geometriche.

Digitized by Google

Così arriviamo al secolo XVII. Allora il precoce *Pascal* e l'avventuroso *Desargues* emettono alcune idee generali, germi di futura lontana evoluzione della greca Geometria. E da ultimo *Cartesio* (1637) sposando felicemente la Geometria all'Algebra, che intanto era venuta facendosi adulta, fonda stabilmente il metodo delle coordinate, e con esso dona, si può dire, le ali alla speculazione geometrica; la quale potè allora spaziare liberamente nell' atmosfera delle idee e dei metodi generali, mentre presso i greci era costretta a camminar con calzari pesanti lungo il sentiero delle considerazioni minute e speciali, non solo pei singoli problemi, ma anche pei singoli casi di ciascun problema.

Poco dipoi, *Cavalieri* e *Roberval* preludenti, *Leibniz* e *Newton* inventano il metodo infinitesimale, e tutta l'attività dei geometri si volge a risolvere con quel potente strumento di ricerca nuove questioni geometriche di gran rilievo non potute affrontare dai greci maestri, ed a passare in rassegna le dottrine da quelli ereditate sottoponendole a novelle prove mediante il reagente dell'Analisi.

Sulla via tracciata da *Cartesio* per lo studio delle curve piane, seppero poi costruire una teoria analitica delle superficie e delle curve sghembe *Parent*, *Clairaut*, *Eulero*, e sopra tutti *Monge* e la sua

Digitized by Google

scuola, procurando così alla Geometria ed all'Analisi insieme notevolissimi incrementi.

Alle accennate due fasi della scienza geometrica, la sintetica e l'analitica, od anche l'euclidea e la cartesiana, una terza tenne dietro, la quale non è peranco compiuta ai giorni nostri. Essa va ampiamente enucleando i germi deposti da *Pascal* e *Desargues*, ed è caratterizzata dal rivivere in essa dell'antico spirito geometrico dei greci, ma reso incomparabilmente più agile e largo e penetrante dalla vivificante influenza del metodo analitico. *Monge*, *Carnot*, *Lamé*, *Poncelet*, *Gergonne*, *Bobillier*,... diedero opera ad aprire quella che ormai può chiamarsi con l'*Hankel* la via regia della Geometria. Come ne sarebbe lieto *Euclide*, se rinascesse! Su questa via si spingono innanzi arditamente *Möbius*, *Steiner*, *Chasles*, *Plücker*, *Staudt*, *Hesse*, *Clebsch*, *Bellavitis*, *Halphen*, e tanti altri viventi, fra' quali occupa un bel posto il nostro *Cremona* coi suoi discepoli *Bertini*, *De Paolis* (e il compianto *Caporali*) con *Cayley*, *Salmon*, *Kummer*, *Jonquières*, *Schröter*, *Sturm*, *Zeuthen*, *Reye*, *Brill*, *Nöther*, *Klein*, *Schubert*,...

Come il guardare gli oggetti e il dividerli in parti sono i modi che noi solitamente adoperiamo per conoscerli addentro (esempio i bimbi coi loro gio-

Digitized by Google

cattoli), così il projettare e il segare sono le due operazioni, dalla cui vece alterna il geometra moderno fa scaturire le proprietà delle figure. Il principio di dualità, che di quell'avvicendamento è in sostanza la enunciazione e la generalizzazione, soccorre opportunamente a moltiplicare la portata di ogni singola ricerca, permettendo di fare, per dirlo al modo volgare, un viaggio e almeno due servizî. E il principio di corrispondenza fra le figure, e la conseguente teoria delle trasformazioni geometriche, vengono a dare la massima estensione ed efficacia ai metodi geometrici, rendendo possibile affrontare problemi, che avrebbero sgomentato il più audace geometra alcuni lustri innanzi. La classificazione delle curve e delle superficie, lo studio delle loro forme, la ricerca delle loro singolarità, lo studio delle proprietà dei sistemi d'infinite curve o superficie, la enumerazione di quelle che soddisfanno a date condizioni, la generazione delle curve e superficie mediante sistemi in corrispondenza, la teoria dei complessi di rette, quella dei connessi, ed altre ancora, sono conquiste della Geometria moderna.

In cotesta opera grandiosa l'Analisi ha una parte importante, essendo stata essa il primo e valido strumento di lavoro. Una teoria delle curve e delle superficie, fondata sulla osservazione diretta e imme-

Digitized by Google

diata delle figure e svolta senza il sussidio di alcun algoritmo, è oggi poco più che adombrata, e se è desiderabile sotto il rispetto della uniformità, della riduzione dei concetti fondamentali al minor numero possibile, e della convenienza del mezzo al fine (« geometrica geometricae »), non pare pur troppo che essa sia per farci guadagnare in facilità di ricerca o di esposizione. A ogni modo sarebbe atto d'ingratitudine dimenticare che è stato il soccorso dell'Analisi, che ci ha messi in grado di radunare l'immenso patrimonio di verità che formeranno la sostanza della nuova teoria. E del resto rimarrà sempre un considerevole gruppo di problemi geometrici che avran mestieri dell'analisi, quali sono quelli concernenti la misura delle grandezze geometriche.

Ma qui è prudente che io mi arresti; poichè la corrente dell'immenso fiume geometrico sarebbe capace di travolgermi. Il che non temo già per me, anzi il naufragar mi è dolce in esso; ma temo per Voi, gentili uditori.

VIII.

La scienza dei numeri si può fondare, quasi esclusivamente, sull'idea di ordine, cioè di prima e di poi.

La Geometria si fonda sulle nozioni di spazio,

Digitized by Google

solido, superficie, linea, punto, e su quella di movimento.

Se, oltre al movimento, si tien conto della nozione di tempo, nasce la Cinematica. E se inoltre s'introduce (sia direttamente, sia mediante le precedenti) la nozione di forza, si originano la Statica e la Dinamica. Le quali, con la Cinematica, costituiscono la Meccanica.

La Meccanica riconosce come suoi fondatori *Archimede*, *Frontino*, *Stevino*, *Galileo*, *Newton*, e fra i più cospicui promotori *Huygens*, *Eulero*, *Lagrange*, *Laplace*...

Accanto a questi, che erano analisti a oltranza, va segnalato *Poinsot*, il quale, recando nelle dottrine della Meccanica lo spirito della pura Geometria, le rese più semplici e perspicue, inaugurando un periodo, che fa riscontro a quello che ai dì nostri percorre la Geometria.

E un nuovo passo nell'indirizzo segnato da *Poinsot* ha di recente fatto la Meccanica per opera del *Ball*. Egli ha esposto popolarmente le sue vedute in un'arguta conferenza, intitolata: « *Una parabola dinamica* », nella quale interloquiscono le seguenti persone allegoriche: Messer Anarmonico, Messer Univoco, Messer Elice, Messer Cartesiano e Messer Querulo.

Digitized by Google

IX.

Ho voluto far cenno di cotesta « *Parabola* », per mostrare come non sia poi vero quel che da molti si va dicendo: che i matematici son gente fredda, prosaica, unilaterale, priva, anzi nemica di ogni slancio; che insomma, come sentenziava il *Lamartine*, « l'insegnamento matematico fa dell'uomo una mac- « china e degrada il pensiero. » Coteste, o Signori, le son calunnie. Rispondano per me: *Archimede*, difensore della sua patria, e il suo entusiastico « *Eureka* »; *Tartaglia*, inventore, che detta in versi la regola per risolvere l'equazione di 3° grado; *Cardano*, *Borelli*, *Ruffini*, medici; *Viète*, *Fermat*, *Genocchi*, giureconsulti; *Hamilton*, *Grassmann*, filologi; *Talete*, *Pitagora*, *Platone*, *Cartesio*, *Leibniz*, filosofi; *Nepero*, *Salmon*, teologi; *Ampère*, *Mascheroni*, *Hamilton* già citato, *Del Grosso*, poeti; *Pascal*, l'autore delle « *Provinciales* » e delle « *Pensées* », che passò gli ultimi anni della breve sua vita nel più puro ascetismo; *Newton*, autore di un'opera sulla *Moneta*, e comentatore dell'*Apocalisse*; *Eulero*, autore delle *Lettres à une Princesse*

Digitized by Google

d'Allemagne; Chauchy, Faà di Bruno, ferventi promotori di Opere pie; *Helmholtz*, fisico e fisiologo; *Carnot*, l'organizzatore della vittoria.

Risponda *Giovanni Bolyai*, spirito bizzarro, cercatore di una lingua universale, violinista e schermitore di vaglia; il quale, trovandosi di guarnigione con degli ufficiali di cavalleria come ufficiale del Genio, provocato da 13 di essi, accettò tutti i cartelli, a patto gli si permettesse di suonare un pezzo per violino dopo ciascuna tenzone; ed egli infatti suonò i 13 pezzi e i 13 avversarî.

E *Sylvester*, negli scritti del quale si incontrano frasi come questa: « Le mille volte la mia mente « era ritornata indarno su quell'argomento, quando « il 28 settembre scorso, passeggiando a bordo dello « splendido battello *Invicta*, andando da Douvre a « Calais, sotto i vivificanti e geniali raggi di un « brillante e benigno sole, mi si presentò questa « idea. » E poco appresso: « Preso da un subitaneo « e fortunato attacco di bronchite che mi confinò in « un letto, durante l'accesso della febbre notturna « il mio pensiero ritornava con crescente attività « a quella forma geometrica... » E in fine: « Il « mio buon Genio m'incontrò a bordo del piroscafo « *Invicta*, e mi lasciò solo tre settimane dopo a « bordo del piroscafo di ritorno da Boulogne. Colà il

Digitized by Google

« mio piacevole sogno algebrico finì! » *Sylvester*, il quale, vedendo che un certo termine non comparisce in una formola dove egli si aspettava di incontrarlo, interrompe il lavoro, e manda a quel termine una invocazione in versi, come a una stella perduta!

Fosse stato più freddo *Evaristo Galois*, analista fortissimo, morto a 20 anni in un duello per frivola cagione, dopo aver dissipata nelle agitazioni politiche, in mezzo ai clubs o sotto i chiavistelli di Santa Pelagia, una vita chiamata a splendido avvenire scientifico! *Galois*, che la notte precedente alla morte, che presentiva, scrisse rapidamente il riassunto delle grandi idee che l'occupavano e lo lasciò al suo migliore amico, quale testamento!

Freddi i matematici! Consento che difficilmente un matematico adotterebbe per linguaggio di amore quello della *Dichiarazione* di *Heine* nel *Nordsee:* « Dai boschi di Norvegia, con mano possente, « io sbarbico l'abete dal fusto più alto, e nell'Etna, « dalla gola rovente, l'intingo; e con questa penna « gigantesca, abbeverata di fuoco, io scrivo nel buio « del firmamento: Agnese, io t'amo! » Consento che il nostro matematico sceglierebbe più maneggevol penna; ma affermo pure che egli non farebbe già la sua dichiarazione con quella stessa pacatezza con cui enuncierebbe un teorema.

Digitized by Google

Oh! Non manca purtroppo nella schiera dei matematici qualche giovane egregio, che, in un momento di supremo sconforto, pose le membra giovanili in terra!...

Ma, e non ha la Matematica il suo lato poetico?

Non meno del poeta, il matematico guarda dall'alto la realtà delle cose, ed astraendo da ciò che hanno di grezzo, di mutabile, di caduco, ne ravvisa le parti perfette e immanenti, e ne rileva le mutue relazioni con un linguaggio espressivo e generale. La fantasia, che è la dote « sine qua non » del poeta, non è essa indispensabile al matematico, anzitutto per procacciarsi l'argomento delle sue ricerche, il quale raramente gli vien pôrto bello e pronto dalle cose esteriori, come invece suole accadere ai naturalisti, e poi per escogitare quegli artifizi, che talora sembrano un colpo di bacchetta magica, e conducono alla soluzione vincendo o evitando enormi difficoltà? E il sentimento della eleganza del concetto, e quello della venustà della forma, non spiccan forse nei veri matematici come nei poeti; cosicchè sovente una dimostrazione è bella quasi allo stesso modo che un sonetto, ed una formola sembra, dirò, un verso scientifico? Sì, o Signori: la Matematica è in non piccola parte poesia; poesia tranquilla, alta e serena; ma poesia! È la poesia della mente.

Digitized by Google

X

Dallo schizzo che per sommi capi son venuto dianzi tratteggiando del nascere e dello svilupparsi della Matematica, Voi potete rilevare come ciascun secolo abbia, benchè in variabile misura, aumentato il patrimonio ereditato dai precedenti; come sempre nuove e più larghe vedute siano succedute alle antiche; e come questo accrescersi ed estendersi delle verità acquisite e delle idee abbia molto guadagnato di rapidità e d'intensità nel secolo che si avvicina al tramonto. Eppure non è infrequente il caso, che i matematici si sentan domandare con un certo tono d'incredulità anche da persone assai colte e intelligenti: ma ci è ancora da far delle scoperte in Matematica?

La risposta è agevole, e non può esser che affermativa. Basta riflettere che tutto ciò che nel mondo fisico e morale accade deve avere un perchè, anzi una necessità; deve quindi obbedire a una legge. Ma di quante mai cose non è a noi mal nota o del tutto ignota la legge? Le tante curve che gli apparati grafici oggidì usitati dai fisiologi, dai meteo-

Digitized by Google

rologi, descrivono, debbono pure avere le loro equazioni, come il circolo o la parabola, e potrebbero dar luogo a nuovi capitoli di Geometria; ma sinora nessuno sa trovare quelle equazioni, e quei capitoli sono ancora da scrivere. La stessa bizzarra linea che la vostra mano descrive arbitrariamente sulla carta, per semplice svago, non è, benchè sembri, in condizioni diverse. È noto che le leggi di *Keplero* vanno applicate con le debite correzioni per la mutua azione perturbatrice dei corpi celesti. E la legge di attrazione di *Newton*, chi ci assicura che sia perfetta, o non sia piuttosto da riguardare come una preziosissima, ma soltanto approssimata, espressione della verità; a quel modo che, tenendo conto di un numero finito di termini di una serie, non si ottiene integralmente ciò che dicesi la somma della serie?

Manca, è vero, un sillogismo che ce lo provi; ma pure noi sentiamo nel nostro intimo, con invincibile persuasione, che le scienze, tutte e ciascuna, anderanno svolgendosi e perfezionandosi indefinitamente nei secoli futuri.

Quanto alla Matematica, il suo progresso è indiscutibile. Ed è provvidenziale che, a misura che il corredo di verità che essa va accumulando si fa più grosso e quindi presumibilmente più difficile ad

Digitized by Google

abbracciare e ricordare, i metodi di ricerca e di esposizione vadano in compenso sempre acquistando maggior potenza e generalità; cosicchè torni agevole subordinare a un medesimo principio generale un sempre maggior numero di casi particolari.

Valga questa considerazione a rassicurare coloro, i quali si sgomentano pensando come ogni giorno vada crescendo il numero delle cognizioni che i giovani devono apprender nelle scuole, e temono che verrà tempo in cui gli uomini saran costretti a sedere sui banchi degli scolari sino alla vecchiaia, se pure il sovraccarico intellettuale non li avrà resi pazzi o non li avrà uccisi giovani. E non parlo poi di certi padri, i quali altro non vedono nella scuola che una tirannia dello Stato, intento a ritardare pei loro figliuoli il giorno del lucro. Costoro forse pretenderebbero che il Governo facesse con loro come *Giamblico* racconta che fece *Pitagora* con un giovane manovale; al quale volle insegnare l'Aritmetica e la Geometria, dandogli inoltre in premio tre oboli, ossia il prezzo di una giornata di lavoro da manovale, per ogni proposizione che imparava.

Crescono senza dubbio, ed è inevitabile, le cognizioni da apprendere in iscuola; ma con assai minor lentezza cresce il tempo a ciò necessario, tra perchè i metodi divengono più perfetti, e perchè

Digitized by Google

alcune delle vecchie dottrine vanno man mano cadu-terandosi. Chiunque istituisca un confronto fra i programmi dei nostri corsi odierni e quelli di venti anni fa, avrà una riprova manifesta della mia asserzione.

Ed anzi, chi ben guardi, si è in cotesta continua e progressiva evoluzione, che risiede la spiegazione del fatto: che i giovani discepoli, più freschi di forze e meglio armati, riescono sovente a far progredire una teoria ben più innanzi di quel che saprebbe il provetto maestro che l'ebbe fondata, senza che ciò si abbia ad ascrivere a maggior potenza d'ingegno. Insomma ogni nuova generazione sale sulle spalle della precedente; così discopre da più alto punto di vista un più ampio orizzonte. E la sacra fiaccola della scienza, luce del mondo dell'intelligenza, passa di generazione in generazione, di paese in paese, traendo dal suo stesso ardere, nuovo e continuo e più gagliardo alimento.

XI.

Un carattere della moderna Matematica è lo spirito di generalità che la informa. Ad esso è dovuta la instaurazione di una teoria generale delle operazioni,

Digitized by Google

la quale permette di abbracciare in un sol quadro le proprietà inerenti alle singole specie di grandezze, sieno esse geometriche o numeriche o meccaniche, come dalla sommità di un monte tutta si domina la regione circostante.

E non si dica che con l'introduzione di tale teoria nell'insegnamento, questo rischia di divenire astruso e difficile. Per secoli si è almanaccato nelle nostre scuole su concetti veramente astrusi, dando sproporzionato sviluppo a una male intesa filosofia; cosicchè vi è sempre un guadagno a sostituirle delle considerazioni che trovano continuo riscontro nei fatti. Aggiungasi che esse si presentano, or qua or là, ad ogni piè sospinto, sotto forme alquanto diverse, fin da' primi elementi; e però mette conto di formularle nel modo più comprensivo. Spetta all'insegnante di saper contemperare le considerazioni generali con le questioni particolari e d'illustrarle con molti esempi, memore che « in scientiis addiscendis exempla prosunt magis quam praecepta »; e sovratutto di non perder mai di vista che il segreto dell'efficacia del maestro sta nel far sì che l'alunno non si sgomenti ma s'interessi, e passi dallo stato ammirativo all'interrogativo.

Un'altra notevole manifestazione dello spirito di generalità della Matematica moderna è la cosidetta

Digitized by Google

« Logica deduttiva, » la quale è stata oggetto di studî interessanti di *Leibniz*, *Hamilton*, *Cayley*, *Boole*, *H. e R. Grassmann*, *Schröder*, *Peirce*, *Clifford*, *Jevons*, *Liard*, e più recentemente del *Peano*.

XII.

Ac gloriatur Geometria, quod tam paucis principiis aliunde petitis tam multa praestet.

(Newton).

Un altro spiccato carattere della Matematica moderna si manifesta nella critica accurata e spregiudicata che si va facendo delle nozioni fondamentali delle varie discipline matematiche.

Così nella scienza del calcolo si son sottoposti a scrupolosa disamina i concetti di numero intero, fratto, irrazionale, negativo, immaginario, d'infinitamente piccolo e d'infinitamente grande, di funzione, di continuità, di derivata, di differenziale, d'integrale, di serie, e così via.

In Geometria un attento esame si è fatto delle nozioni primordiali di spazio, superficie, linea, punto, movimento, ecc. Si è sentito più che mai imperioso il bisogno di enunciare tutte le verità alle quali si

Digitized by Google

ricorre per dimostrare i singoli teoremi. Quando si pensa ai tanti secoli che son trascorsi prima che si provvedesse adeguatamente a far quello da cui parrebbe si fosse dovuto incominciare, ritorna in mente l'esclamazione di *Béranger:* « Combien de temps une pensée, vierge obscure, attends son époux! » Ma è naturale che ciò sia seguito. L'intuizione a chi non sa ancora di Geometria parecchie cose mostra evidenti, senza che egli senta il dovere di graduare cotesta evidenza. Dove l'intuizione non arriva e la necessità di una dimostrazione s'impone, egli la cerca; ma in questa o in quella parte della dimostrazione non di rado domina ancora l'intuizione con la sua inconscia fede; e per conseguire una dimostrazione completa nuovi sforzi occorrono ancora. Indi si presenta il confronto fra le varie dimostrazioni, che lo rende più esigente e più rigoroso.

Per istabilire una scienza, qualunque essa sia, è necessario ammettere un certo gruppo di postulati, ossia di verità, che sono o si considerano come primordiali, che si accettano per comune consenso, ma che non si sanno dimostrare. Nella loro scelta vi è un certo arbitrio; ma essi devono soddisfare a due condizioni: che siano i più chiari possibili e che nessuno sia conseguenza degli altri. Natural-

Digitized by Google

mente nella scelta dei postulati l'uomo si fa guidare dall'esperienza, sia che per essa s'intendano i sensi di cui è fornito, sia che a questi si aggiunga il sussidio di apparecchi atti a renderli più squisiti. Ma ciò non è necessario per istabilire una scienza assolutamente logica. Tanto più che l'esperienza può trarci in inganno, e gli esempi non mancano. Che per ragioni di pratica utilità i postulati sieno scelti tenendo conto dei fatti naturali, bene sta; ma ciò non ha importanza dal punto di vista scientifico.

Evidentemente, per appurare la verità di un'affermazione qualunque, p. es. di un postulato, un mezzo buono consiste nell'ammetterla provvisoriamente come vera e dedurne delle conseguenze: se fra queste se ne incontra una assurda, quell'affermazione va subito condannata come falsa; ma se nessuna assurda si presenta fra le conseguenze che noi deduciamo (e che non son tutte le deducibili), noi non siamo autorizzati a proclamar vera quell'affermazione. No: perchè bisogna prima indagare che avverrebbe se ammettessimo il contrario di quell'affermazione, oppure un'altra di cui quella fosse un caso particolare; e solo quando quest'altra ci risultasse falsa, potremmo ritener vera la prima. Eppure questo principio, così chiaro e semplice, di logica, è stato fino al secolo scorso pretermesso in

Digitized by Google

un caso dei più notevoli. Parlo del cosidetto « postulato delle parallele » o « postulato V di *Euclide* », o « assioma XI », il quale può in sostanza ridursi a questo: per un punto fuori di una retta passa una sola retta parallela alla retta medesima. Essendo esso uno dei meno evidenti fra i postulati ammessi dagli antichi geometri, era naturale che si sperasse di riuscire a farlo derivare come conseguenza delle verità precedentemente stabilite, di ridurlo cioè a teorema; e innumerevoli tentativi, tutti infruttuosi, furono fatti in tale direzione. Ma ciò che va biasimato si è di non aver applicato il principio di logica testè accennato, ostinandosi a considerare « a priori » quel postulato come l'unico compatibile con le idee di retta e di piano.

A quanto sappiamo da una recente comunicazione del Prof. *Beltrami*, il primo tentativo degno di nota nella diritta via, ch'era stata smarrita, fu fatto dal Padre *Saccheri* da S. Remo col suo: *Euclides ab omni naevo vindicatus, sive conatus geometricus quo stabiliuntur prima ipsa universæ Geometriæ principia, Auctore Hieronymo Saccherio, Societate Jesu, in Ticinensi Universitate Matheseos Professore* (Milano, 1733).

In un piano si abbia una retta; da due punti di essa e da una stessa banda si tirino due segmenti

Digitized by Google

ad essa perpendicolari e fra loro eguali, e si congiungano i loro estremi con un segmento. Gli angoli, che questo segmento congiungente fa coi due primi, sono necessariamente eguali; e non possono quindi esser che amendue retti od ottusi od acuti. È chiaro che nella prima ipotesi il segmento congiungente è eguale a quello compreso fra i due punti dati, nel secondo minore, nel terzo maggiore; e viceversa. Il *Saccheri* considera « ab initio » queste tre ipotesi come egualmente possibili; e stabilisce per ciascuna che, se è vera in un caso, sarà vera sempre e sarà la sola vera. Ciò premesso, il *Saccheri* mostra che nella prima ipotesi la somma dei tre angoli di ogni triangolo rettilineo è eguale a due retti, nella seconda maggiore, nella terza minore. Dimostra assurda la seconda ipotesi. Indi fa vedere che nella prima ipotesi da un punto dato si può tirare una sola parallela a una retta data; ma che nella terza ipotesi da un punto dato si possono tirare infinite rette che non incontrino una retta data, le quali riempiono due angoli opposti al vertice, e le rette lati di tali angoli sono le due parallele alla retta data. Ma disgraziatamente il *Saccheri* non si arresta qui; invece, ligio alla tradizione, impegna quello che chiama « diuturnum proelium adversus hypotesin anguli acuti », e cerca di provare, con ar-

Digitized by Google

gomenti infetti di errori, che la « inimica hypotesis » è « absolute falsa, quia se ipsam destruit. »

Legendre, certamente senza sapere del *Saccheri*, visto che il postulato delle parallele equivale ad ammetter che la somma degli angoli di un triangolo è due retti, mostrò anch'egli che, ove si prescinda da quello, si può solo provare che la somma è minore di due retti, e che se fosse due retti in un certo triangolo, tale sarebbe in tutti. E qui si arrestò, più prudente del *Saccheri*.

Il sommo *Gauss* comprese l'impossibilità di dimostrare la somma degli angoli di un triangolo eguale a due retti indipendentemente dal postulato euclideo, e la possibilità di costruire una Geometria, conseguente in sè stessa e non contraddittoria all'esperienza, dove tal somma fosse minore di due retti, e decrescente al crescer dell'area del triangolo. Chiamò questa Geometria « non-euclidea. » (Meglio sarebbe chiamarla « ultra-euclidea, » come propone *Sylvester*). Ma *Gauss* non pubblicò nulla.

Lobatschewsky professore a Kasan, e *Giovanni Bolyai*, pervennero per loro conto a questa stessa Geometria, sulla quale pubblicarono pregevoli ed estesi lavori. Ma questi rimasero quasi ignorati prima della pubblicazione della « Corrispondenza tra *Gauss* e *Schumacher* » (1862), che attirò su di essi l'at-

Digitized by Google

tenzione dei Geometri. *Lobatschewsky* chiamò prima « Geometria immaginaria » e poi « Pangeometria » il nuovo sistema geometrico; e veramente esso è più generale di quello esclusivamente studiato dai greci. *Bolyai* lo chiamò « Geometria assoluta. »

Ma coteste denominazioni non si adattano perfettamente alla cosa; poichè la Geometria euclidea da una parte, e quella di *Gauss*, *Lobatschewsky* e *Bolyai* dall'altra, non son le sole possibili logicamente. Il che fu messo in chiaro da *Riemann* nella celebre « Dissertazione », pubblicata nel 1867 dopo la immatura sua morte. Egli osservò che dall'esser lo spazio illimitato non consegue necessariamente che esso sia pure infinito; imperocchè, senza cadere in contraddizione con la nostra intuizione, la quale (notate bene) non può esercitarsi se non su parti finite dello spazio, si potrebbe concepire che lo spazio fosse sì illimitato, ma finito e rientrante in sè stesso; a quel modo che la superficie di una sfera è illimitata ma finita e rientrante in sè stessa, e che una circonferenza è illimitata ma finita e rientrante in sè stessa.

Si dimostra che in tal caso la somma degli angoli di un triangolo sarebbe maggiore di due retti e crescente con l'area, e due rette in un piano non potrebbero non incontrarsi, e le rette sarebbero non

Digitized by Google

infinite ma rientranti. Una Geometria fondata su questi concetti occuperebbe, accanto alla tradizionale Geometria euclidea, un posto, dirò, simmetrico a quello della Geometria di *Gauss*. La euclidea tramezzerebbe le due di *Gauss* e di *Riemann*.

Alle medesime conclusioni giungeva *Helmholtz*, e le pubblicava poco di poi.

Per quanto riguarda la parte planimetrica, si è riescito a rendere percettibili ai sensi le astratte speculazioni che avevan condotto alle tre Geometrie, e metter così in luce la loro logica connessione. Senza escir dalla Geometria di *Euclide*, è facile vedere che la superficie sferica (e ogni altra superficie di curvatura costante positiva) offre una rappresentazione per la Geometria di *Riemann*, facendo i circoli massimi sulla sfera l'ufficio delle rette sul piano riemanniano. Per la Geometria di *Gauss*, riescì al nostro *Beltrami* di mostrare che vi sono delle superficie (quelle di curvatura costante negativa), da lui chiamate « pseudosferiche », sulle quali le linee più brevi fra due punti si comportano come le rette nel piano gaussiano. La bella scoperta gettò inattesa luce sul controverso argomento.

Da queste ricerche emerse: che il postulato delle parallele non è dimostrabile; che si può ammetterlo o no, senza deviar dalla sana logica; che anzi è

Digitized by Google

possibile costruire tre Geometrie, tutte logicamente esatte, aventi in comune tutto ciò che da quel postulato non dipende.

Per amor di brevità e per non entrare in considerazioni troppo sottili, non parlo dei lavori del *Cayley*, del *Klein* e di altri, sulle tre Geometrie, che il *Klein* chiama rispettivamente « parabolica, iperbolica, ellittica. »

Ma quale delle tre Geometrie è quella che meglio, o che unicamente si presta ad essere assunta come conforme ai fenomeni naturali, e che quindi mette conto di studiare e svolgere a preferenza? La questione non può esser risoluta pienamente. Noi possiamo, sì, dire che tutte le osservazioni e le misure fatte coi sensi e cogli strumenti, incluse le interplanetari, concordano con la Geometria di *Euclide;* ma non siamo in grado di asserire che concordino perfettamente, anzichè con un'approssimazione tale che le differenze sfuggano alle più scrupolose nostre osservazioni. Le distanze interplanetari che sappiamo misurare, e che siam soliti a considerare come meravigliosamente grandi, non sono che piccola cosa rispetto alle tante che non riesciremo mai a misurare! Pensate che il sole non è che una delle innumerevoli stelle della via lattea!

Digitized by Google

XIII.

Quand'il s'agit de questions transcendantes,
soyez transcendentalement clairs.
DESCARTES.

La questione delle parallele si collega strettamente a quella della natura dello spazio che ci circonda. Anzi essa ha potentemente contribuito a suscitare un'altra questione, interessantissima, relativamente al concetto di spazio.

Per via di astrazione noi dalla nozione di spazio passiamo successivamente a quelle di superficie, di linea, di punto. In una linea concepiamo infiniti punti, in una superficie infinite linee, nello spazio infinite superficie; e ciò ha condotto per varie vie i geometri al concetto di « dimensione, » a dire che la linea ha una dimensione, la superficie due, lo spazio tre. Nè vi è equivoco possibile se diciamo che la superficie è uno « spazio » a due dimensioni, la linea uno « spazio » a una dimensione; poichè la parola spazio è stata sempre adoperata anche in tali significati (p. es. si definisce il moto uniforme quello in cui si percorrono spazî eguali durante tempi eguali...). Or qui sorge la domanda: esiste

Digitized by Google

per avventura uno « spazio a quattro dimensioni? » Uno spazio, nel quale il nostro spazio a tre dimensioni starebbe a quell'istesso modo che una superficie sta nel nostro spazio e una linea in una superficie? A cotesta domanda noi non possiamo rispondere affermativamente, poichè i nostri sensi non son atti ad avvertire la presenza di uno spazio a quattro dimensioni, nè l'immaginazione ci aiuta a concepirlo. Ma non possiamo nemmeno risponder negativamente, senza cadere nell'avventato e nel gratuito.

Per meglio spiegarmi, ricorrerò all'ipotesi, molto suggestiva, messa innanzi dall'*Helmholtz*.

Supponiamo per poco un essere animato a due dimensioni, vivente su una superficie (p. e. sul piano o sulla sfera), della quale egli sia parte, e dalla quale non possa escire; così come noi siamo parte del nostro spazio e non possiamo escirne. Quell'essere potrebbe muoversi sulla superficie e recarsi su essa da luogo a luogo; per la natura dei suoi sensi egli percepirebbe la superficie e le linee giacentivi, ma non percepirebbe lo spazio a tre dimensioni, nè avrebbe modo d'immaginarselo: or ciò non toglie che lo spazio a tre dimensioni esista.

Analogamente: un animale a una dimensione, vivente su una linea, faciente parte di essa e impos-

Digitized by Google

sibilitato a escirne, percepirebbe la linea, ma non le superficie nè lo spazio tridimensionale.

Orbene, chi ci assicura che non esista uno spazio a quattro dimensioni, benchè noi, animali tridimensionali, viventi in uno spazio a tre dimensioni, parti di esso, e impossibilitati a escirne, non possediamo sensi capaci di percepire, nè mente capace d'immaginare uno spazio a quattro dimensioni?

Se un tale spazio esistesse, non parrebbero impossibili alcuni fenomeni curiosi. Ad esempio: che un sasso potesse entrare in una stanza chiusa senza forarne le pareti, sia uscendo dal nostro spazio per rientrarvi, sia cadendovi dallo spazio a quattro dimensioni; a quel modo che un pezzo di piano può venire ad adagiarsi su un altro pezzo più ampio di piano senza incontrarne il contorno. Non voglio dire con questo che noi abbiamo ad aspettarci un giorno o l'altro una pioggia di sassi stando chiusi nella nostra stanza, senza rottura d'invetriate; chè anzitutto noi non sappiamo se un sasso possa escire dal nostro spazio e poi rientrarvi, nè se fuori del nostro spazio esistan dei sassi. Qui non si tratta che di un sasso « geometrico » (aggettivo d'innocuità).

Ma lasciamo coteste, si chiamino pure fantasticherie, ma non follie. Quel che a me importa di notare si è che i geometri, senza deviar dalla logica

Digitized by Google

più cauta, son riesciti a utilizzare questi concetti, accettandone una parte, sulla quale non è possibile alcuna seria obiezione. Ed ecco come:

Ciascun punto di una linea può esser individuato, cioè distinto da tutti gli altri, mediante la conoscenza di un certo numero (reale), in guisa che a ogni punto della linea corrisponda un numero e ad ogni numero un punto, che inoltre a due punti variabili tendenti a coincidere corrispondan due numeri tendenti anch'essi a coincidere, e viceversa. Del pari, ciascun punto di una superficie può esser individuato da due numeri, in guisa che a ogni punto corrisponda una coppia di numeri e viceversa, che inoltre a due punti tendenti a coincidere corrispondano due coppie di numeri tendenti rispettivamente a coincidere, e viceversa. E da ultimo, ciascun punto dello spazio nostro può esser individuato da tre numeri, in modo analogo. Questi numeri diconsi « coordinate », e sul concetto delle coordinate riposa la Geometria analitica.

Si chiami « varietà n.pla » l'insieme di tutti i possibili gruppi di n numeri. È chiaro, per la esposta definizione delle coordinate, che la Geometria di una linea o di una superficie o del nostro spazio si potranno considerare rispettivamente come applicazioni della teoria delle varietà semplici o doppie

Digitized by Google

o triple a casi particolari. Anche i colori (notiamo di passaggio con l'*Helmholtz*) formano una particolare varietà tripla, potendo ogni colore, secondo le esperienze di *Th. Young* e di *Clerk Maxwell*, esser rappresentato come la miscela di tre colori fondamentali, ciascuno preso in una determinata quantità.

Similmente, possiam considerare l'insieme dei toni semplici come una varietà doppia, distinguendoli fra loro soltanto secondo l'altezza e la forza del suono e lasciando da parte le differenze di tempra.

Ma, restringiamoci a considerare la Geometria di una linea o di una superficie o del nostro spazio come applicazione delle teorie delle varietà semplici o doppie o triple. Or queste teorie sono alla lor volta casi particolari della teoria di una varietà *n*.pla; ed ogni questione relativa a una varietà *n*.pla ha l'analoga nelle varietà semplici o doppie o triple. Dunque ogni questione relativa a una varietà *n*.pla darà luogo a una questione relativa alle linee o alle superficie o al nostro spazio.

Viceversa, per mezzo della generalizzazione (che è una delle armi più potenti della mente umana, e che è anzi « le prôpre de l'homme », come direbbe *Rabelais*), noi da ogni questione sulle linee o sulle superficie o sul nostro spazio possiamo assorgere ad

Digitized by Google

una o più questioni relative alle varietà semplici o doppie o triple, e in generale alle varietà *n*.ple.

Per procedere più spediti in cotesto doppio lavoro di specializzazione e di generalizzazione, si è sperimentato vantaggioso di adoperare la denominazione di « spazio a *n* dimensioni », anzichè di varietà *n*.pla. E così si sono anche adottate le denominazioni di « punto, linea, superficie, figura, movimento » in questi spazî a *n* dimensioni. Non v'è nulla a ridire. Del resto, basta un po' di attenzione e di esercizio per non far confusioni.

In quest'ordine di idee molte importanti ricerche sono state fatte durante gli ultimi due decennî, con grande profitto così della Geometria come dell'Analisi; ma io non m'indugierò a enumerarli, urgendo l'ora, e starò pago a citare i nomi di *Riemann*, *Beltrami*, *Lipschitz*, *Betti*, *Kronecker*, *Lie*, *Killing*,... nell'indirizzo puramente analitico della teoria (curvatura degli spazî, Geometria infinitesimale, Meccanica), e di *Grassmann*, *Cayley*, *Klein*, *Halphen*, *Jordan*, *Nöther*, *Clifford*,... nell'indirizzo analitico-geometrico. E segnalerò *Schlegel*, il quale è riescito a costruire i modelli delle projezioni nel nostro spazio di certi poliedri a quattro dimensioni.

A poco a poco, semplificando i procedimenti e sgomberandoli, per quanto era possibile, dai calcoli,

Digitized by Google

si è pervenuto ad adoperare in queste ricerche una forma di deduzione che può dirsi sintetica, perchè simile a quella che si usa nella Geometria pura (e parecchi confidano che si riescirà a liberare da concetti analitici, dall'uso delle coordinate, persino la definizione degli spazî ad n dimensioni). Operazioni analoghe alle due principali della Geometria, projettare e segare, sono state introdotte sistematicamente nello studio degli spazî a quante si vogliano dimensioni. E come nella ordinaria Geometria sovente il miglior modo di trovare una proprietà di una figura piana o lineare consiste nel farla derivare da una proprietà di una figura solida; così pure si è riescito a fare derivare molte riposte proprietà di complicate figure a una o due o tre dimensioni da quelle di figure a quattro o più dimensioni meno complicate nella loro struttura. Notevoli risultati in questa direzione hanno ottenuti *Klein*, *Clifford*, *Schubert*, *Moore*, *Loria*, e segnatamente i geometri italiani *Veronese*, *Segre*, *Caporali*, *Bertini*, *Del Pezzo*, *Castelnuovo*, *Aschieri*, *Bordiga*, *Cassani*.

E dopo ciò, ci si venga ancora a dire che queste sono astruserie, inutilità, metafisicherie, e che so io!

Del resto anche questo concetto si riscontra in germe nell'antica Geometria. Ad esempio: il primo aspetto, sotto cui i greci guardarono le coniche e

Digitized by Google

ne investigarono le proprietà, si fu di considerarle come sezioni prodotte da un piano in un cono circolare, vale a dire come spazî a una dimensione nascenti dalla intersezione di due spazi a due dimensioni (piano e cono), od anche come projezioni di uno spazio a una dimensione (un circolo) fatta da un punto (il vertice del cono) su uno spazio a due dimensioni (il piano). Inoltre si noti che da uno stesso cono retto, cioè dal più semplice dei coni, essi seppero ottenere, con opportune sezioni piane, tutte le possibili coniche, specie e individui, nonchè le loro degenerazioni (una coppia di rette o un punto).

XIV.

Ma è tempo che io mi taccia. La nave universitaria, già in pieno assetto, è impaziente di salpare per l'annuale suo viaggio attraverso l'oceano della scienza, e « cras ingens iterabimus aequor. »

Un sol pensiero ancora mi sta a cuore di esprimere: un pensiero di speranza: ed è per Voi, cari giovani che mi ascoltate.

Voi fortunati, la cui culla fu allietata dal sole dell'Italia libera ed una. Oh! non sono ancor tra-

Digitized by Google

scorsi trent'anni, che questa Niobe delle nazioni languiva miseramente, sminuzzata in minuscoli staterelli, fra' quali un cieco assolutismo innalzava barriere non meno intellettuali che materiali. Erano quei tristi tempi, dei quali il mio eroico *Settembrini* così parlava alla gioventù napoletana: « Voi, o gio-« vani, non le vedeste quelle tenebre, non vi sen-« tiste stringere il cuore, non piangeste d'ira e di « vergogna sullo strazio della patria. Noi che fummo « in quel buio, ed ora siamo in questa luce bene-« detta; noi che non avevamo nome, ed oggi siamo « italiani, noi sappiamo che bene sia questa libertà « e questa Italia! » La Matematica era allora in Italia il culto di pochi alti pensatori, che si sforzavano di tener vivo il sacro fuoco, sebbene condannati alla solitudine e inceppati per mille guise nell'insegnamento. La gratitudine del paese non dimenticherà i nomi di *Brioschi*, *Betti*, *Genocchi*, *Tortolini*, *Chelini*, *Bellavitis*, *Sannia*, *Tardy*,....

Ma, proclamata l'Unità Nazionale, abbattute le innaturali barriere, riavvicinati mediante la locomotiva e rinvigoriti i centri di studio, moltiplicate le scuole, l'opera di quei benemeriti potè finalmente fruttificare; e una numerosa schiera di giovani eletti si venne intorno a loro addensando, per opera dei quali la rinnovellata Italia occupa un posto assai

Digitized by Google

decoroso fra le nazioni più colte nel campo delle ricerche matematiche. Tra i nepoti di *Lagrange*, di *Plana*, di *Bidone*, di *Chiò*, di *S. Robert*, di *Faà di Bruno*, la dotta schiera già trovò, e tra loro essa confida che troverà ancora, nuovi campioni per le future battaglie.

L'arruolamento è aperto. Venite, e avanti!

Digitized by Google

NOTE

Stimo utile notare, benchè un po' alla rinfusa, le date di nascita e morte di quasi tutti i matematici citati nel presente discorso: Talete 640-540 a. C., Pitagora 596-470 a. C. o 580-500, Platone 429-348 a. C., Eratostene 276-194 a C., Euclide circa 320 a. C., Archimede 287-212 a. C., Apollonio circa 200 a. C., Ipparco 161-126 a. C., Tolomeo 125-200, Pappo circa 300, Diofanto (intorno al 365 ?), Fibonacci 1189-1250 circa, Luca Pacciolo 2ª metà del sec. XV, Scipione del Ferro 1465-1525, Tartaglia 1500-59, Cardano 1501-76, Ferrari 1522-1565, Viète 1540-1603, Harriot 1560-1621, Napier 1550-1618, Fermat 1590-1663, Stevin ? -1635, Desargues 1593-1662, Descartes 1596-1650, Galilei 1564-1642, Kepler 1571-1620, Cavalieri 1598-1647, Roberval 1602-73, Borelli 1608-79, Hudde 1633-1704, Wallis 1616-1703, Pascal 1623-62, Huygens 1629-95, Leibniz 1646-1716, Newton 1652-1727, Maclaurin 1698-1746, Tschirnhausen 1651-1708, Giovanni Bernoulli 1654-1705, Giacomo Bernoulli 1667-1748, Taylor 1685-1731, Cotes 1682-1716, l'Hôpital 1661-1704, Parent 1666-1716, Grandi 1671-1742, Manfredi 1681-1761, Riccati 1690-1735, Fagnano 1682-1766 Malfatti 1731-1807, Clairaut 1713-1765, Eulero 1707-1783, d'Alembert 1717-1783, Lagrange 1736-1813, Laplace 1749-1823, Legendre 1752-1833 Ampère 1775-1836, Fourier 1768-1830, Poisson 1781-1840, Monge 1746-1818, Dupin 1784-1873, Gauss 1771-1855, Lacroix 1765-1843, Hachette 1769-1834, Bessel 1784-1846, Ruffini 1765-1822, Plana 1781-1864, Bidone 1781-1839, Fresnel 1788-1827, Carnot 1753-1823, Poncelet 1788-1867, Chasles 1796-1880, Bobillier 1797-1832, Gergonne 1771-1859, Möbius 1790-1868, Steiner 1796-1863, Plücker 1801-68, Staudt 1798-1867, Cauchy 1789-1857, Mascheroni 1750-1808, Lobatschewsky 1793-1856, G. Bolyai 1802-60, Abel 1802-29, Jacobi 1804-51, Lejeune-Dirichlet 1805-59, Riemann 1827-66, Galois 1811-32, Hesse 1811-74, Göpel 1812-47, Rosenhain 1816-87, Sturm 1804-55, Leverrier 1811-77, Puiseux 1820-83, Bouquet 1818-85, Faà di Bruno 1825-88, Liouville 1806-82, Grassmann 1808-77, Hamilton 1805-65, Clebsch 1833-73, Hankel 1839-73, Clifford 1845-79, Halphen 1844-89, Chelini 1802-78, Bellavitis 1803-80, Tortolini 1808-74, Chiò 1813-71, Ballada di S. Robert 1815-88, Genocchi 1817-89, Caporali 1855-86.

Pei brani citati di vari autori, veggasi: *Lacroix:* Essai sur l'enseignement des Mathématiques. — *Cayley:* Bulletin des Sciences mathématiques vol. $VIII_2$, 1884. — *Sylvester:* Nature, 1884, 1885. 1886. — *Ball:* Nature 1884, 1887 2ª parte. — *Fourier:* Théorie analytique de la Chaleur. Discours préliminaire.

Digitized by Google

Agli autori citati relativamente alla teoria degli spazî, si possono aggiungere, nella prima serie indicata nel testo, i seguenti:

Schläfli, Cristoffel, Klein, Clifford, Voss, Schur, Newcomb, Brunel, Beez, Brill, Hoppe, Scheffler, Stringham,.....

Da una lettera del mio dotto amico Colonnello G. Perrucchetti mi piace trascrivere le seguenti considerazioni, le quali ponno servire di complemento a quelle accennate nel § III:

. . . . A conferma del tuo dire potresti, a mio avviso, aggiungere un argomento non trascurabile, affermando come « la stazionarietà negli studi matematici sia stata sinonimo di stagnamento, sopratutto nelle applicazioni industriali, presso lo Stato che conta la più vecchia delle civiltà, l'impero Chinese. »

Ed in questo pensiero mi hanno confermato gli apprezzamenti di uno fra i più dotti e valenti nostri uomini di mare, l'Ammiraglio Arminjon; il quale, essendo stato nostro Plenipotenziario e Negoziatore del primo trattato (1866) concluso dopo l'epoca romana dalla novella Italia colla China, studiò quel paese e pubblicò in uno scritto interessantissimo (1) le impressioni riportate durante quella missione.

Accennando alle cause di stazionarietà di quel vastissimo impero, l'Arminjon scrive:

« L'istruzione dei Mandarini, esclusivamente letteraria, è troppo in-
« completa, perchè la China possa tenere un posto elevato nel consorzio
« delle nazioni moderne. Il livello dello scibile in questa parte del mondo
« non è salito da qualche secolo. Le Matematiche superiori, la Fisica, la
« Meccanica analitica, la Chimica paiono ancora in parte cose superflue;
« quindi le infinite applicazioni loro non possono essere note ai Chinesi
« che in modo assolutamente imperfetto. »

Invano i Missionari cristiani diedero veste chinese ad Euclide; e per tagliar corto, oggi che i Chinesi, dopo quasi 50 anni di umiliazioni ricevute da Inglesi e Francesi, cominciano a sentire la necessità di mettere da parte le loro *giunche preadamitiche*, e ricorrere per le armi e le navi ai modelli che la nostra portentosa meccanica ha perfezionati, non riescono a fabbricarle in paese, ma devono ricorrere ad Armstrong ed a Krupp, od attirare in paese uomini tecnici stranieri.

Su questa via, progredendo, la China potrà fare delle grandi improvvisate all'Europa ed all'America; per intanto però, colle sue giunche di vecchio modello e col fare il viso dell'arme ad Euclide, si è trovata esposta, come tutti sanno, malgrado i suoi quattrocento milioni abbondanti di sudditi, a subire l'insulto e il danno di una guerra d'esterminio, fatta recentemente sulle sue coste dalla marina di una nazione europea che conta solo 37 milioni di cittadini . . . .

(1) La China e la Missione Italiana nel 1866. Firenze. Uffizi della *Rassegna Nazionale* 1885.

Digitized by Google

Digitized by Google